

Кришталь В. Ф.<sup>1</sup>, к.т.н., доцент, Рижков Л. М.<sup>2</sup>, д.т.н., професор

## МЕТОДИКА СИНТЕЗУ РІВНЯНЬ РУХУ ВІБРОІЗОЛЬОВАНОЇ ГІРОСКОПІЧНОЇ СИСТЕМИ

**En** A technique is proposed for synthesizing the motion equations of a vibro-isolated gyroscopic system using general dynamics theorems for both elements of the device and for a housing with a vibration protection system.

The motion equations of each element of the gyroscopic system are written in the axes of the mobile coordinate system, which is rigidly connected with it. To set up the motion equations, the theorems of the change in the motion quantities principal moment and the theorem of the change in the motion quantities principal vector are used. These equations include the principal vector and the moment of external forces acting on the element; Moments and forces of interaction between the elements and the possible discrepancy between the center of mass and the center of the element's suspension is taken into account.

The technique to set up the rotational motion equations is based on the technique proposed by Ishlinsky A. Y. and provides the elimination of the unknown components of the interaction forces between the elements (frames, rings) and takes into account the divergence of the suspension centers of the cardan suspension elements of the device determined by the suspension geometry and elastic deformations of the supports axes of the suspension. The components of the interaction forces moments, that coincide with the rotation axes of the elements, are assumed to be known and are not excluded from the equations.

In the equations of translational motion of elements, the components of the elements interaction forces can be eliminated if the supports of the suspension axes are considered to be absolutely rigid. When the finite rigidity of the axle supports of the suspension is taken into account, the interaction forces are assumed to be known and are not excluded from the translational motion equations.

The motion equations of the vibro-insulated housing of the device are recorded in a coordinate system connected to it rigidly, which axes are the inertia central axes. The forces and moments of the forces of the hull and the vibration protection system interaction are given as a superposition of potential forces (moments of potential forces), which are determined by the expression of the potential energy and the resistance forces (moments of resistance forces), which are determined from the scattering function. The vibration protection system is considered to consist of passive vibration isolators. Vibration isolators are represented as three elastic elements of parallel coordinate axes and the elastic forces are linearly dependent on deformations. The drag force depends linearly on the strain rate.

The system of motion equations is supplemented by the expressions for the control moments and relations for the angular velocities of the elements.

<sup>1</sup> Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут» кафедра теоретичної механіки

<sup>2</sup> Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут» кафедра приладів та систем керування літальними апаратами

**Ru** Предлагается методика синтеза уравнений движения виброизолированной гироскопической системы с использованием общих уравнений динамики. Синтезированные уравнения движения удерживают известные реакции в осях подвеса элементов гироскопической системы и корпуса, что позволяет исследовать динамику взаимного влияния системы виброзащиты и гироскопической системы.

### Вступ

Для складання рівнянь руху класичних гіроскопічних систем, в основному, використовуються загальні теореми динаміки або методика рівнянь Лагранжа другого роду [1, 2, 3]. Оскільки в багатьох випадках гіроскопічна система – є системою елементів, що обертаються навколо певних осей, застосування загальних теорем динаміки є найбільш очевидним із фізичної точки зору. Експлуатація гіроскопічних систем на рухомих об'єктах вимагає застосування систем вібро- та ударозахисту. Основна методика складання рівнянь руху віброізолюваного тіла – це застосування формалізму Лагранжа.

### Постановка задачі

У роботі пропонується методика синтезу рівнянь руху віброізолюваної гіроскопічної системи із використанням загальних теорем динаміки як для елементів приладу, так і для корпусу із системою віброзахисту. При цьому пружні сили та їх моменти визначаються із виразу потенціальної енергії, а сили опору та їх моменти – на підставі функції розсіювання [4]. Вважається, що система віброзахисту складається із пасивних віброізоляторів.

### Основна частина

Рівняння руху кожного  $i$ -го елемента гіроскопічної системи записуються в осях системи координат (СК)  $O_i x_i y_i z_i$  жорстко зв'язаної з ним:

$$\frac{d\overset{1}{K}_{iO_i}}{dt} + \overset{r}{\omega}_i \times \overset{r}{K}_{iO_i} = \overset{r}{M}_{iO_i}^e + \overset{r}{L}_{i,i+1O_i} - \overset{r}{L}_{i,i-1O_i} - m_i \overset{r}{O_i} C_i \times \overset{r}{w}_{O_i}, \quad (1)$$

$$\frac{d\overset{1}{Q}_i}{dt} = \overset{r}{F}_i^e + \overset{r}{R}_{i,i+1} - \overset{r}{R}_{i,i-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

У формулах (1) та (2):  $\overset{1}{Q}_i$ ,  $\overset{1}{K}_{iO_i}$  – головний вектор кількостей руху та кінетичний момент  $i$ -го елемента;  $d\overset{1}{K}_{iO_i}/dt$  – відносна похідна;  $\overset{1}{F}_i^e$ ,  $\overset{1}{M}_{iO_i}^e$  – головний вектор та момент зовнішніх сил, діючих на  $i$ -й елемент;  $\overset{1}{L}_{i,i-1O_i}$ ,  $\overset{1}{L}_{i,i+1O_i}$ ,  $\overset{1}{R}_{i,i-1}$ ,  $\overset{1}{R}_{i,i+1}$  – моменти та сили взаємодії між  $i$  та  $i-1(i+1)$

елементами;  $\dot{\mathbf{w}}_{O_i}$ ,  $\dot{\omega}_i$  – прискорення точки підвісу  $\hat{I}_i$  та кутова швидкість  $i$ -го елемента,  $C_i$  – центр мас  $i$  елемента,  $n$  – кількість елементів (ротор, рами). Зазначимо, що  $i=1$  відповідає ротору, причому  $\dot{L}_{1,0O_1} = \dot{R}_{1,0} = 0$ ,  $\mathbf{O}_1 C_1 = 0$ .

У випадку розбіжності центрів підвісу  $O_{i-1}$  та  $O_i$  елементів приладу, момент сил взаємодії  $\dot{L}_{i,i-1}$  при переході від полюса  $O_{i-1}$  до  $O_i$  визначається за формулою:

$$\dot{L}_{iO_i} = \dot{L}_{iO_{i-1}} + \mathbf{O_i O_{i-1}} \times \dot{R}_{i,i-1}, \quad (3)$$

в якій невідомі складові сили взаємодії  $\dot{R}_{i,i-1}$   $i$ -го та  $i-1$  елемента виражаються із формул (2) шляхом послідовного виключення сил взаємодії  $\dot{R}_{1,2}$ , ...,  $\dot{R}_{i-1,i}$  попередніх  $i-1$  елементів:

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{Q}_j^r = \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{F}_j^e + \mathbf{R}_{i,i-1}^r. \quad (4)$$

У разі урахування пружних деформацій опор осі підвісу елемента, у припущенні поступального переміщення його осі підвісу, сили взаємодії вважаються відомими, та їх можна подати так:  $\dot{R}_{i,i-1} = -\mathbf{K}_{i-1}^o \dot{\mathbf{r}}_{i-1} - \mathbf{C}_{i-1}^r \mathbf{r}_{i-1}$ , де  $\mathbf{K}_{i-1}^o$ ,  $\mathbf{C}_{i-1}^r$  – діагональні матриці коефіцієнтів в'язкого тертя та коефіцієнтів пружності,  $\mathbf{r}_{i-1}$  – радіус-вектор переміщення центра підвісу  $i-1$  елемента.

Відповідно, вектор  $\mathbf{O_i O_{i-1}}$  у формулі (3) подається як сума  $\mathbf{O_i O_{i-1}} = \mathbf{\rho}_{i-1} + \mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{O_i O'_{i-1}} + \mathbf{O'_{i-1} O_{i-1}}$ , що складається з постійного вектора  $\mathbf{\rho}_{i-1} = \mathbf{O_i O'_{i-1}}$  та радіуса-вектора  $\mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{O'_{i-1} O_{i-1}}$ . Останній визначає переміщення початку відліку СК  $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ , викликане пружними деформаціями підшипників в осях підвісу  $i-1$  елемента. Зазначимо, що для чутливого елемента виконується умова  $\dot{\mathbf{\rho}}_i = 0$ , а пружні деформації  $\dot{\mathbf{r}}_i$  враховуються тільки в опорах ротора (момент пружного дебалансу). У випадку дослідження впливу низькочастотних коливань на похибки гіроскопічної системи для зовнішнього карданового підвісу приймають  $\dot{\mathbf{r}}_i = 0$ .

Рівняння руху віброізовьованого корпусу прилада записуються в СК  $O_k \xi_k \eta_k \zeta_k$ , жорстко зв'язаної з ним, осі якої є центральними осями інерції:

$$\frac{d\mathbf{K}_{kO_k}}{dt} + \dot{\omega}_k \times \mathbf{K}_{kO_k} = \mathbf{M}_{kO_k}^e + \mathbf{L}_{kO_k}^e - \mathbf{L}_{k,nO_k}^r, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n,k} \overset{\cdot}{Q}_j = \sum_{j=1}^{n,k} \overset{\cdot}{F}_j^e + \overset{\cdot}{R}_k, \quad (6)$$

де  $\overset{\cdot}{Q}_k$ ,  $\overset{\cdot}{K}_{kO_k}$  – головний вектор кількостей руху та кінетичний момент корпусу;  $\overset{\cdot}{\omega}_k$  – кутова швидкість корпусу;  $\overset{\cdot}{L}_{k,nO_k}$  – момент сил взаємодії корпусу та  $n$ -го елемента гіроскопічної системи;  $\overset{\cdot}{R}_k = \overset{\cdot}{R}_k^\pi + \overset{\cdot}{R}_k^\Phi$ ,  $\overset{\cdot}{L}_{kO_k} = \overset{\cdot}{L}_{kO_k}^\pi + \overset{\cdot}{L}_{kO_k}^\Phi$  – сила та момент сил системи віброзахисту, які подаються як суперпозиція потенціальних сил  $\overset{\cdot}{R}_k^\pi$  (моментів потенціальних сил  $\overset{\cdot}{L}_{kO_k}^\pi$ ) та сил опору  $\overset{\cdot}{R}_k^\Phi$  (моментів сил опору  $\overset{\cdot}{L}_{kO_k}^\Phi$ ).

При складанні рівнянь, за опорну СК вибирається географічна система координат  $O\xi\eta\zeta$ , вісь  $O\xi$  якої напрямлена на схід, вісь  $O\eta$  – на північ,  $O\zeta$  – по вертикалі місця вгору. Із рухомим об'єктом зв'язується СК  $O_o\xi_o\eta_o\zeta_o$ , кутове положення осей якої відносно географічної СК визначається кутом рискання (кут курсу)  $\psi_o$ , кутом диференту (тангажа)  $\vartheta_o$  та кутом крену  $\phi_o$ .

Кутове положення СК  $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$  відносно СК  $O_o\xi_o\eta_o\zeta_o$ , визначається кутами Ейлера-Крилова  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\phi$  (рис. 1), а переміщення початку відліку СК  $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$  відносно  $O_o\xi_o\eta_o\zeta_o$  визначається координатами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

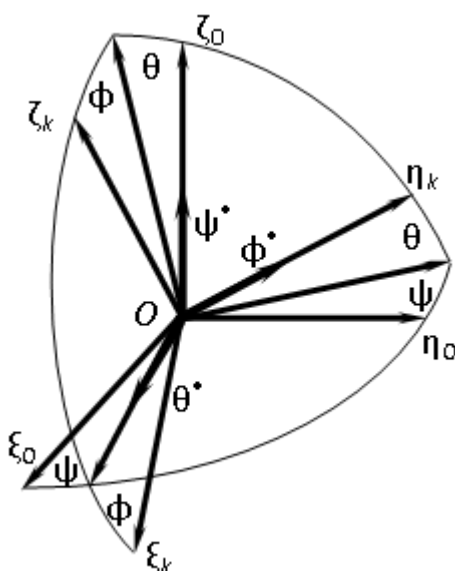


Рис. 1. Кутове положення СК  $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$  відносно  $O_o\xi_o\eta_o\zeta_o$

Переходи між вказаними СК визначаються матрицями  $S$  та  $A_k$ :

$$O\xi\eta\zeta \xrightarrow{S} O_o\xi_o\eta_o\zeta_o \xrightarrow{A_k} O_k\xi_k\eta_k\zeta_k,$$

Сили та моменти сил взаємодії віброізолизованого корпусу із об'єктом (основною) можна визначити із виразів [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{R_k^\pi} &= \left\{ -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, -\frac{\partial \Pi}{\partial \eta}, -\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \right\}; & \mathbf{r}_{R_k^\Phi} &= \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, -\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\}; \\ L_{kO_k}^\pi &= \{ L_{k\xi_k}^\pi, L_{k\eta_k}^\pi, L_{k\zeta_k}^\pi \}; & L_{kO_k}^\Phi &= \{ L_{k\xi_k}^\Phi, L_{k\eta_k}^\Phi, L_{k\zeta_k}^\Phi \}, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} L_{k\xi_k}^\pi &= -\frac{d\Pi}{d\vartheta} \cos \varphi + \frac{d\Pi}{d\psi} \sin \varphi \cos \vartheta; & L_{k\eta_k}^\pi &= -\frac{d\Pi}{d\varphi} - \frac{d\Pi}{d\psi} \sin \vartheta; \\ L_{k\zeta_k}^\pi &= -\frac{d\Pi}{d\vartheta} \sin \varphi - \frac{d\Pi}{d\psi} \cos \varphi \cos \vartheta; \\ L_{k\xi_k}^\Phi &= -\frac{d\Phi}{d\xi} \cos \varphi + \frac{d\Phi}{d\psi} \sin \varphi \cos \vartheta; & L_{k\eta_k}^\Phi &= -\frac{d\Phi}{d\eta} - \frac{d\Phi}{d\psi} \sin \vartheta; \\ L_{k\zeta_k}^\Phi &= -\frac{d\Phi}{d\zeta} \sin \varphi - \frac{d\Phi}{d\psi} \cos \varphi \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Вважаємо, що віброізолятори подаються у вигляді трьох пружних елементів паралельних до координатних осей СК  $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$ ,  $r_{l\xi}$ ,  $r_{l\eta}$ ,  $r_{l\zeta}$  – координати точок закріплення віброізоляторів на корпусі приладу у цій же СК.

Позначимо через  $c_{l\xi}$ ,  $c_{l\eta}$ ,  $c_{l\zeta}$  та  $h_{l\xi}$ ,  $h_{l\eta}$ ,  $h_{l\zeta}$  коефіцієнти пружності та коефіцієнти в'язкого тертя віброізоляторів в напрямку координатних осей СК  $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$ . Вважаємо, що сили пружності лінійно залежать від деформацій, а сили опору лінійно залежать від швидкості деформацій. Тоді потенціальна енергія  $\Pi$  та функція розсіювання  $\Phi$  запишуться, у залежності від деформацій  $\Delta_{l\xi}$ ,  $\Delta_{l\eta}$ ,  $\Delta_{l\zeta}$  пружних елементів системи віброзахисту, наступним чином:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (c_{l\xi} \Delta_{l\xi}^2 + c_{l\eta} \Delta_{l\eta}^2 + c_{l\zeta} \Delta_{l\zeta}^2), \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (h_{l\xi} \dot{\Delta}_{l\xi}^2 + h_{l\eta} \dot{\Delta}_{l\eta}^2 + h_{l\zeta} \dot{\Delta}_{l\zeta}^2).$$

Із урахуванням матриці переходу  $A_k$  між СК  $O_o\xi_o\eta_o\zeta_o$  та  $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta_{l\xi} &= \xi + (a_{11} - 1) \cdot r_{l\xi} + a_{12} \cdot r_{l\eta} - a_{13} \cdot r_{l\zeta}, \\ \Delta_{l\eta} &= \eta + a_{21} \cdot r_{l\xi} + (a_{22} - 1) \cdot r_{l\eta} + a_{23} \cdot r_{l\zeta}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{l\zeta} = \zeta + a_{31} \cdot r_{l\xi} + a_{32} \cdot r_{l\eta} + (a_{33} - 1) \cdot r_{l\zeta},$$

де  $a_{ij}$  – елементи матриці  $A_k$ .

Для складання рівнянь руху гіроскопічної системи використовується методика Ішлінського О. Ю. [1, 2, 3], за якою виключаються невідомі складові моментів реакцій  $\overset{1}{L}_{i,i-1O_i}$  у осях підвісу елементів. Відомими складовими цих моментів вважаються такі, що напрямлені вздовж осей підвісу елементів. Моменти  $\overset{1}{M}_{iO_i}^e$  також вважаються відомими.

Зазначимо, що в рівняннях обертального руху корпусу також виключаються невідомі складові моменту  $\overset{1}{L}_{n,kO_k}$ . Систему рівнянь руху у цілому потрібно доповнити виразами для моментів керування та співвідношеннями для кутових швидкостей елементів  $\overset{1}{\omega}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, k$ .

Кутові швидкості основи  $\overset{1}{\omega}_o$  та корпусу  $\overset{1}{\omega}_k$  визначаються на підставі співвідношень

$$\overset{r}{\omega}_o = \overset{r}{\Omega} + \overset{r}{\psi}_o + \overset{1}{\varphi}_o + \overset{r}{\phi}_o; \quad \overset{r}{\omega}_k = \overset{r}{\omega}_o + \overset{r}{\psi}_k + \overset{1}{\varphi}_k + \overset{r}{\phi}_k,$$

де  $\overset{1}{\Omega}$  – кутова швидкість географічної СК.

Вважаючи для конкретності, що гіроскопічна система складається із зовнішнього трьохвісного карданового підвісу та чутливого елемента (трьохступеневого гіроскопа), кутові швидкості зовнішнього карданового підвісу подаються так

$$\overset{r}{\omega}_6 = \overset{r}{\omega}_k + \overset{1}{\alpha}_e; \quad \overset{r}{\omega}_5 = \overset{r}{\omega}_6 + \overset{1}{\beta}_e; \quad \overset{r}{\omega}_4 = \overset{r}{\omega}_5 + \overset{1}{\gamma}_e, \quad (8)$$

а кутові швидкості чутливого елемента

$$\overset{r}{\omega}_3 = \overset{r}{\omega}_4 + \overset{1}{\alpha}_r; \quad \overset{r}{\omega}_2 = \overset{r}{\omega}_3 + \overset{1}{\beta}_r; \quad \overset{r}{\omega}_1 = \overset{r}{\omega}_2 + \overset{1}{\gamma}_r. \quad (9)$$

Тут  $\overset{1}{\alpha}$  – кутова швидкість обертання ротора гіроскопа, повороти на кути  $\alpha_e$  та  $\alpha_r$  здійснюються навколо вертикальних осей, повороти на кути  $\beta_e$  та  $\beta_r$  здійснюються навколо горизонтальних осей. Перехід між СК визначається матрицями переходу  $A_i$ :

$$O_k \xi_k \eta_k \zeta_k \xrightarrow{A_6} O_6 x_6 y_6 z_6, \quad O_{i+1} x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1} \xrightarrow{A_i} O_i x_i y_i z_i, \\ i = 1, 2, \dots, 5.$$

Позначимо ліву частину рівнянь (1) так

$$\frac{d\overset{1}{K}_{iO_i}}{dt} + \overset{r}{\omega}_i \times \overset{r}{K}_{iO_i} = \overset{r}{K}'_{iO_i} = \left\{ \overset{r}{K}'_{ix_i}, \overset{r}{K}'_{iy_i}, \overset{r}{K}'_{iz_i} \right\}.$$

Тоді після виключення невідомих складових реакцій, запишемо наступні рівняння обертального руху чутливого елементу

$$\begin{aligned}
 K'_{1y_1} &= \cancel{H} = M_{1y_1}^e + L_{1,2y_1} \\
 K'_{2x_2} + K'_{1x_1} \cos \gamma_r + K'_{1z_1} \sin \gamma_r &= M_{2x_2}^e + L_{2,3x_2} - M_{2,1x_2}^D, \\
 K'_{3z_3} + (K'_{2y_2} + K'_{1y_1}) \sin \beta_r + (K'_{2z_2} - K'_{1x_1} \sin \gamma_r + K'_{1z_1} \cos \gamma_r) \cos \beta_r &= \\
 &= M_{3z_3}^e + L_{3,4z_3} - M_{2,1y_2}^D \sin \beta_r - M_{2,1z_2}^D \cos \beta_r + M_{3,2z_1}^D.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Опускаючи рівняння зовнішнього карданова підвісу, для корпусу приладу отримаємо наступні рівняння обертального руху

$$\begin{aligned}
 K'_{k\xi_6} + K'_{6x_6} \cos \alpha_e - [K'_{6y_6} + K'_{5y_5} \cos \beta_e - (K'_{5z_5} - K'_{4x_4} \sin \gamma_e + \\
 + K'_{4z_4} \cos \gamma_e) \sin \beta_e] \sin \alpha_e &= M_{k\xi_k}^e + L_{k\xi_k} - [L_{6,5x_6} + (m_6 \mathbf{r}_{O_6} \times \mathbf{w}_{O_6})_{x_6}] \times \\
 \times \cos \alpha_e + \left\{ [L_{5,4y_5} - M_{5y_5}^e] \cos \beta_e - \left[ - (L_{4,3x_4} + (m_4 \mathbf{r}_{O_4} \times \mathbf{w}_{O_4})_{x_4}) \sin \gamma_e + \right. \right. \\
 \left. \left. + (L_{4,3z_4} + (m_4 \mathbf{r}_{O_4} \times \mathbf{w}_{O_4})_{z_4}) \cos \gamma_e - M_{5z_5}^e \right] \sin \beta_e + (m_6 \mathbf{r}_{O_6} \times \mathbf{w}_{O_6})_{y_6} \right\} \sin \alpha_e - \\
 - M_{k,6\xi_k}^D; \\
 K'_{k\eta_6} + K'_{6x_6} \sin \alpha_e + [K'_{6y_6} + K'_{5y_5} \cos \beta_e - (K'_{5z_5} - K'_{4x_4} \sin \gamma_e + \\
 + K'_{4z_4} \cos \gamma_e) \sin \beta_e] \cos \alpha_e &= M_{k\eta_k}^e + L_{k\eta_k} - [L_{6,5x_6} + \\
 + (m_6 \mathbf{r}_{O_6} \times \mathbf{w}_{O_6})_{x_6}] \sin \alpha_e - \left\{ [L_{5,4y_5} - M_{5y_5}^e] \cos \beta_e - \left[ - (L_{4,3x_4} + \right. \right. \\
 \left. \left. + (m_4 \mathbf{r}_{O_4} \times \mathbf{w}_{O_4})_{x_4}) \sin \gamma_e + (L_{4,3z_4} + (m_4 \mathbf{r}_{O_4} \times \mathbf{w}_{O_4})_{z_4}) \cos \gamma_e - M_{5z_5}^e \right] \sin \beta_e + \right. \\
 \left. + (m_6 \mathbf{r}_{O_6} \times \mathbf{w}_{O_6})_{y_6} \right\} \cos \alpha_e - M_{k,6\eta_k}^D,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 K'_{k\zeta_k} &= M_{k\zeta_k}^e + L_{k\zeta_k} - L_{k,6\zeta_k} - M_{k,6\zeta_k}^D, \\
 \text{де } \mathbf{M}_{k,6}^D &= \mathbf{O}_k \mathbf{O}_6 \times \mathbf{R}_{k,6}, \quad \mathbf{M}_{i,i-1}^D = \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i,i-1}, \quad i=1,2,\dots,6.
 \end{aligned}$$

У рівняннях корпусу моменти  $L_{k,6\zeta_k}$ ,  $L_{6,5x_6}$ ,  $L_{5,4y_5}$  не виключались, оскільки вважаються відомими. Ці моменти виникають в осях повороту відповідних рам та складаються з моментів опору, моментів тертя та керуючих моментів. Момент  $L_{4,3z_4}$  в наведених рівняннях також вважається відомим: він може включати моменти сил опору та тертя в вертикальній осі повороту чутливого елемента та момент керування.

Момент  $L_{4,3x_4}$  є невідомим і повинен бути виключений, ураховуючи співвідношення

$$L_{4,3x_4} = (K'_{3x_3} + L_{3,2x_3}) \cos \alpha_r - [K'_{3y_3} + (K'_{2y_2} + K'_{1y_1} + M_{2,1y_2}^D) \cos \beta_r - \\ - (K'_{2z_2} - K'_{1x_1} \sin \gamma_r + K'_{1z_1} \cos \gamma_r + M_{2,1z_2}^D) \sin \beta_r] \sin \alpha_r.$$

У свою чергу, в останньому виразі момент  $L_{3,2x_3}$  може включати моменти сил опору та тертя у горизонтальній осі повороту чутливого елемента та момент керування.

У рівняннях обертального руху (10) та (11), прискорення центрів підвісу елементів визначаються з виразів:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_6}} &= \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_k}} + \mathbf{\varepsilon}_k \times (\mathbf{r}_{\rho_6} + \mathbf{r}_{r_6}) + \mathbf{\omega}_k \times (\mathbf{\omega}_k \times (\mathbf{r}_{\rho_6} + \mathbf{r}_{r_6})) + \frac{d^2 \mathbf{r}_{r_6}}{dt^2} + 2\mathbf{\omega}_k \times \frac{d\mathbf{r}_{r_6}}{dt}; \\ \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_i}} &= \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_{i+1}}} + \mathbf{\varepsilon}_{i+1} \times (\mathbf{r}_{\rho_i} + \mathbf{r}_{r_i}) + \mathbf{\omega}_{i+1} \times (\mathbf{\omega}_{i+1} \times (\mathbf{r}_{\rho_i} + \mathbf{r}_{r_i})) + \frac{d^2 \mathbf{r}_{r_i}}{dt^2} + 2\mathbf{\omega}_{i+1} \times \frac{d\mathbf{r}_{r_i}}{dt}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, 5,$$

де прискорення початку відліку СК  $O_o \xi_o \eta_o \zeta_o$  та центра мас корпусу мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_o}} &= -\mathbf{g} + \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_B; \\ \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_k}} &= \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_o}} + \mathbf{\varepsilon}_k \times \mathbf{r}_k + \mathbf{\omega}_k \times (\mathbf{\omega}_k \times \mathbf{r}_k) + \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} + 2\mathbf{\omega}_k \times \frac{d\mathbf{r}_k}{dt}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут  $\mathbf{v}_B$ ,  $\frac{d\mathbf{v}_B}{dt}$  – швидкість та прискорення вібропереміщення об'єкта,  $\mathbf{g}$  – прискорення вільного падіння.

Для запису рівнянь (6) поступального руху корпусу прилада, похідні від головних векторів кількостей руху  $Q_i$  елементів виразимо через прискорення відповідних центрів мас:

$$\mathbf{r}_{\dot{w}_{C_i}} = \mathbf{r}_{\dot{w}_{O_i}} + \mathbf{\varepsilon}_i \times \mathbf{r}_{\rho_{Ci}} + \mathbf{\omega}_i \times (\mathbf{\omega}_i \times \mathbf{r}_{\rho_{Ci}}); \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (14)$$

причому  $\mathbf{r}_{\dot{w}_{O_i}}$  визначаються із формул (12).

Рівняння поступального руху віброізовованого прилада складаються з рівнянь руху корпусу

$$\sum_{j=1}^{n,k} m_j \mathbf{w}_{C_j \xi_k} = \sum_{j=1}^{n,k} F_{j \xi_k}^e - \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad (15)$$



$$\sum_{j=1}^{n,k} m_j w_{C_j \eta_k} = \sum_{j=1}^{n,k} F_{j \eta_k}^e - \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\eta}};$$

$$\sum_{j=1}^{n,k} m_j w_{C_j \zeta_k} = \sum_{j=1}^{n,k} F_{j \zeta_k}^e - \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\zeta}}$$

та, при врахуванні пружних деформацій опор ротора, рівнянь поступального руху ротора

$$m_1 w_{C_1 x_1} = F_{1 x_1}^e - h_{x_1} \ddot{x}_1 - c_{x_1} \dot{x}_1; \quad m_1 w_{C_1 y_1} = F_{1 y_1}^e - h_{y_1} \ddot{y}_1 - c_{y_1} \dot{y}_1;$$

$$m_1 w_{C_1 z_1} = F_{1 z_1}^e - h_{z_1} \ddot{z}_1 - c_{z_1} \dot{z}_1. \quad (16)$$

Таким чином, система рівнянь руху буде складатись з рівнянь (10), (11), (15), (16), в яких кутові швидкості визначаються виразами (8), (9), а прискорення – (12), (13), (14). Зазначимо, що отримані рівняння потрібно доповнити співвідношеннями для моментів керування.

### Висновки

Синтезовані рівняння руху будуть утримувати відомі реакції у рівняннях руху як елементів приладу так і у рівняннях руху корпусу, що дозволить досліджувати динаміку взаємного впливу системи віброзахисту та гіроскопічної системи.

### Список використаної літератури

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. / А. Ю. Ишлинский // М : АН СССР, 1963. – 482 с.
2. Павловский М. А. Теория гироскопов. / М. А. Павловский // К : Вища школа, 1986. – 303 с.
3. Лазарев Ю. Ф. Основы теории чувствительных элементов систем ориентации. / Ю. Ф. Лазарев, П. М. Бондарь // К : НТУУ «КПІ», 2011. – 644 с.
4. Ганиев Р. Ф. Колебания твердых тел. / Р. Ф. Ганиев, В. О. Кононенко // М : Наука, 1976. – 432 с.